

میانگین

به نام خدا

این جلسه می‌خواهیم درباره میانگین یا معدل صحبت کنیم.

همتا تا حالا براتون پیش اومده که بخواید معدلتون رو حساب کنید، برای مناسبه معدل چکار می‌کنیم؟

اول نمره همه درسها رو با هم جمع می‌کنیم و بعد عددی به دست اومده رو بر تعداد درسها تقسیم می‌کنیم. یعنی در واقع:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}$$

آله:

میانگین رو با \bar{x}

مجموع داده‌ها رو با S

تعداد داده‌ها رو با n

نشون بدیم، فرمول به دست آوردن میانگین به صورت زیر میشه:

$$\bar{x} = \frac{S}{n}$$

مثال:

۲- نمره‌های یک دانش‌آموز به صورت زیر است:

۱۶ ۱۵/۵ ۱۶ ۱۵ ۱۷ ۱۹ ۱۸/۵ ۱۴ ۱۶/۵ ۱۷/۵

میانگین نمره‌های او را پیدا کنید.

اول باید مجموع نمرات یعنی S رو به دست بیاریم:

$$s = 16 + 15.5 + 16 + 15 + 17 + 19 + 18.5 + 14 + 16.5 + 17.5$$

بنابراین:

$$s = 165$$

مقدار S رو به دست آوردیم.

حالا باید n رو پیدا کنیم، n چی بود؟ تعداد دروس.

می‌شماریم ببینیم چند تا درس داریم:

$$n = 10$$

این دو مقدار رو در فرمول مربوط به میانگین قرار میدیم تا میانگین به دست بیاد:

$$\bar{x} = \frac{s}{n} = \frac{165}{10} = 16.5$$

بنابراین معدل یا میانگین نمرات این درسا برابر با ۱۶/۵ هست.

یه مثال دیگه:

میانگین نمرات مریم در ۸ درس برابر ۱۷ شده، جمع نمرات مریم در این درسا

چقدره؟

در اینجا میانگین و تعداد درسها رو به ما داده و جمع نمرات رو خواسته. داریم:

$$n = 8$$

$$\bar{x} = 17$$

ما باید S رو به دست بیاریم. این مقادیر رو در فرمول میانگین جاگذاری می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{S}{n} \rightarrow 17 = \frac{S}{8}$$

بنابراین:

$$17 = \frac{S}{8} \rightarrow S = 17 \times 8 = 136$$

بنابراین S یا همون مجموع نمرات مریم برابر ۱۳۶ هست.

مثال بعد:

میانگین نمرات امیر در ۸ درس برابر $13/5$ شده است، اگر نمرات دو درس دیگر او $14/5$ و $15/5$ باشد، میانگین کل دروس امیر را محاسبه کنید.

ما برای محاسبه میانگین به چه چیزایی احتیاج داریم؟ S و n

n تعداد درسها، در کل چند تا درس داریم؟ نمره ۸ تا درس رو داشتیم، نمره ۲ تا درس دیگه هم اعلام شده. پس در مجموع ۱۰ تا درس داریم. یعنی:

$$n = 10$$

حالا باید مجموع نمرات رو به دست بیاریم:

اول مجموع نمرات اون ۸ تا درس رو پیدا می‌کنیم و بعد با دو تا نمره ای که بعدا اعلام شده جمع می‌کنیم:

برای به دست آوردن مجموع نمرات ۸ تا درس، مشابه مثال قبل عمل می‌کنیم:

توجه داشته باشید S ی که در اینجا نوشته همیشه مربوط به ۸ تا درس نه کل دروسها

$$13.5 = \frac{S}{8} \rightarrow s = 13.5 \times 8 = 108$$

حالا این مقدار رو با نمرات دروسهای جدید جمع می‌کنیم:

$$s = 108 + 14.5 + 15.5 = 138$$

پس مقدار S هم برابر ۱۰۸ شد، حالا این مقادیر رو در فرمول میانگین قرار میدیم:

$$\bar{x} = \frac{s}{n} = \frac{138}{10} = 13.8$$

بنابراین معدل کل دروسهای امیر برابر ۱۳/۸ هست.

میانگین تقریبی

حالا می‌فوییم میانگین رو در حالتی که تعداد داده‌ها زیاده به دست بیاریم.

وقتی که تعداد داده‌ها زیاد باشه باز هم سراغ دسته بندی داده‌ها می‌بریم.

ممکنه این سوال براتون مطرح شه که چرا از روش قبلی برای به دست آوردن میانگین استفاده نمی‌کنیم.

فرض کنید به مدرسه داریم که ۲۵۰ تا دانش آموز دارد. یعنی ۱۰ تا کلاس و هر کلاس ۲۵ تا دانش آموز. حالا ما می‌فوییم معدل درس ریاضی کل مدرسه رو حساب کنیم.

اگه بفوییم ۲۵۰ تا عدد رو با هم جمع کنیم و تقسیم بر تعداد کنیم، هم خیلی کار وقت گیریه و هم احتمال خطا کردن توی اون زیاده. پس چکار می‌کنیم؟

میگیم معلم هر کلاس به نمره رو به عنوان میانگین نمرات کلاس خودش رو اعلام کنه.

چی به دست میاریم؟

۱۰ تا کلاس داشتیم پس ۱۰ تا عدد به دست ما میرسه.

حالا برای به دست آوردن میانگین کل مدرسه، میانگین این ده تا عدد رو حساب می‌کنیم. یعنی همه رو با هم جمع می‌کنیم و بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم.

برای به دست آوردن میانگین تقریبی، باید ابتدا جدول زیر رو کامل کنیم:

مردود دسته ها	فراوانی	مرکز دسته	مرکز دسته \times فراوانی

برای کامل کردن این جدول به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱. داده‌ها رو دسته بندی می‌کنیم (با توجه به مطالبی که در جلسه قبل یاد گرفتیم)

۲. فراوانی هر دسته رو به دست میاریم.

۳. مرکز هر دسته رو به دست میاریم (در ادامه روش به دست آوردن مرکز دسته رو آموزش میدیم)

۴. مرکز دسته رو در فراوانی دسته ضرب می‌کنیم و در ستون خودش قرار می‌دهیم.

۵. مجموع اعدادی که در ستون فراوانی هستن رو به دست میاریم.

۶. مجموع اعدادی که در ستون "مرکز دسته × فراوانی" هست رو به دست میاریم.

۷. میانگین تقریبی رو از فرمول زیر به دست میاریم:

$$\text{میانگین تقریبی} = \frac{\text{مجموع اعداد ستون "مرکز دسته × فراوانی"}}{\text{مجموع اعداد ستون فراوانی}}$$

یه مثال رو با هم می‌بینیم که بهتر متوجه بشیم.

نمرات ریاضی یک کلاس به صورت زیر است:

۱۹ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۰ - ۲۰ - ۱۷ - ۱۷ - ۱۳ - ۱۵ - ۱۴ - ۱۳ - ۱۷ - ۱۲ - ۱۶ - ۱۴

۲۰ - ۱۸ - ۱۸ - ۱۸ - ۱۷ - ۱۵ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۶ - ۱۸

الف: آنها را در ۴ طبقه دسته بندی کنید.

ب: میانگین تقریبی کلاس را مناسبه کرده و تعیین کنید در کدام دسته قرار می‌گیرد.

الف: در جلسه قبل دسته بندی داده ها رو یاد گرفتیم. داده ها باید به ۴ دسته تقسیم بشن، برای اینکه بتونیم هرود دسته ها رو تعیین کنیم به دامنه تغییرات و طول دسته ها نیاز داریم:

کمترین عدد - بیشترین عدد = دامنه تغییرات

$$\text{دامنه تغییرات} = 18 - 12 = 6$$

حالا طول دسته ها رو تعیین می‌کنیم:

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته}}$$

بنابراین:

$$\text{طول دسته} = \frac{6}{3} = 2$$

پس طول دسته ها برابر ۲ هست و داده ها بصورت زیر طبقه بندی میشن:

حدود دسته ها			
$12 \leq x < 14$			
$14 \leq x < 16$			
$16 \leq x < 18$			
$18 \leq x \leq 20$			

کاری که تا اینجا انجام دادیم رو در جلسه قبل یاد گرفته بودیم.

قسمت ب: برای به دست آوردن میانگین تقریبی، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

فراوانی هر دسته رو به دست میاریم.

یعنی مشخص می‌کنیم که در هر گروه از این دسته‌ها چند تا داده داریم.

این مقادیر رو هم در ستون "فراوانی" می‌نویسیم:

مردود دسته‌ها	فراوانی		
$12 \leq x < 14$	۳		
$14 \leq x < 16$	۵		
$16 \leq x < 18$	۷		
$18 \leq x \leq 20$	۱۰		

در ستون بعد باید مرکز دسته رو مشخص کنیم.

برای به دست آوردن مرکز دسته، هر بالا و پایین هر دسته رو با هم جمع می‌کنیم و بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\text{مرکز دسته اول} = \frac{12 + 14}{2} = 13$$

$$\text{مرکز دسته دوم} = \frac{14 + 16}{2} = 15$$

$$\text{مرکز دسته سوم} = \frac{16 + 18}{2} = 17$$

$$\text{مرکز دسته چهارم} = \frac{18 + 20}{2} = 19$$

این رو هم توی ستونی با عنوان "مرکز دسته" می‌نویسیم:

مرکز دسته	فراوانی	مرکز دسته	
$12 \leq x < 14$	۳	۱۳	
$14 \leq x < 16$	۵	۱۵	
$16 \leq x < 18$	۷	۱۷	
$18 \leq x \leq 20$	۱۰	۱۹	

توجه داشته باشید که مرکز دسته، در واقع نماینده هر دسته هست، یعنی ما دیگر با بقیه عددهای اون دسته کاری نداریم و فرضمون اینه که همه برابر "مرکز دسته" هستن.

در ستون بعد باید عددهای دو تا ستون رو در هم ضرب کنیم، مرکز دسته و فراوانی

$$\text{دسته اول} : ۳ \times ۱۳ = ۳۹ = \text{مرکز دسته} \times \text{فراوانی}$$

$$\text{دسته دوم} : ۵ \times ۱۵ = ۷۵ = \text{مرکز دسته} \times \text{فراوانی}$$

$$\text{دسته سوم} : ۷ \times ۱۷ = ۱۱۹ = \text{مرکز دسته} \times \text{فراوانی}$$

$$\text{دسته چهارم} : ۱۰ \times ۱۹ = ۱۹۰ = \text{مرکز دسته} \times \text{فراوانی}$$

این مقادیر رو هم در ستون آخر قرار میدیم:

مرکز دسته	فراوانی	مرکز دسته	مرکز دسته \times فراوانی
$12 \leq x < 14$	۳	۱۳	۳۹
$14 \leq x < 16$	۵	۱۵	۷۵
$16 \leq x < 18$	۷	۱۷	۱۱۹
$18 \leq x \leq 20$	۱۰	۱۹	۱۹۰

در این مرحله باید مجموع ستون فراوانی و مجموع ستون آفر رو به دست بیاریم:

$$\text{مجموع ستون فراوانی} = ۳ + ۵ + ۷ + ۱۰ = ۲۵$$

$$\text{مجموع ستون آفر} = ۳۹ + ۷۵ + ۱۱۹ + ۱۹۰ = ۴۲۳$$

مرکز دسته × فراوانی	مرکز دسته	فراوانی	مردود دسته ها
۳۹	۱۳	۳	$12 \leq x < 14$
۷۵	۱۵	۵	$14 \leq x < 16$
۱۱۹	۱۷	۷	$16 \leq x < 18$
۱۹۰	۱۹	۱۰	$18 \leq x < 20$
۴۲۳		۲۵	مجموع

از این دو تا عدد به دست اومده برای مناسبه میانگین تقریبی استفاده می‌کنیم:

$$\text{میانگین تقریبی} = \frac{423}{25} = 16.92$$

میانگین تقریبی توی کدوم دسته قرار میگیره؟ دسته سوم، چون $۱۶/۹۲$ بین ۱۶ و ۱۸ هست.

حل تمرین صفحه ۱۲۶

میانگین داده‌ها

۲- جدول زیر را کامل و میانگین را حساب کنید.

دسته‌ها	خط نشان	فراوانی	مرکز دسته	مرکز × فراوانی
$0 \leq x < 4$	### /			
$4 \leq x < 8$	////			
		۸	۱۰	
$12 \leq x < 16$				
	### ////		۱۸	
جمع		۴۴		

قدم به قدم جلو می‌رویم:

با توجه به ستون اول متوجه میشویم که طول دسته‌ها برابر ۴ هست، پس به راحتی می‌تونیم ستون اول رو کامل کنیم.

از طرفی می‌دونیم که مرکز دسته برابر با $\frac{\text{انتهای دسته} + \text{ابتدای دسته}}{2}$. پس ستون چهارم رو هم می‌تونیم بنویسیم:

دسته‌ها	خط نشان	فراوانی	مرکز دسته	مرکز × فراوانی
$0 \leq x < 4$	### /		2	
$4 \leq x < 8$	////		6	
$8 \leq x < 12$		۸	۱۰	
$12 \leq x < 16$			14	
$16 \leq x < 20$	### ////		۱۸	
جمع		۴۴		

حالا میریم سراغ ستونها فراوانی و فط و نشان.

هر با فط و نشان داریم، می‌شماریم و در ستون فراوانی عددش رو می‌نویسیم.

هر با هم که عدد داریم، در ستون فط و نشان برایش فط می‌کشیم.

نکته‌ای که اینجا وجود داره اینکه سطر چهارم نه عدد فراوانی رو داریم و نه فط و نشان.

پکار کنیم؟

عدد مربوط به فراوانی رو نداریم ولی جمع فراوانی‌ها رو داریم، پس می‌تونیم فراوانی ستون چهارم رو هم مناسبه کنیم:

$$44 - (6 + 4 + 8 + 9) = 17$$

دسته‌ها	خط نشان	فراوانی	مرکز دسته	مرکز \times فراوانی
$0 \leq x < 4$	### /	6	2	
$4 \leq x < 8$	////	4	6	
$8 \leq x < 12$	### ///	8	10	
$12 \leq x < 16$	### -### -### //	17	14	
$16 \leq x < 20$	### ////	9	18	
جمع		44		

عددهای ستونهای فراوانی و مرکز دسته رو به دست آوردیم، اونها رو در هم ضرب می‌کنیم تا ستون آخر هم تکمیل بشه:

دسته‌ها	خط نشان	فراوانی	مرکز دسته	مرکز \times فراوانی
$0 \leq x < 4$	### /	6	2	12
$4 \leq x < 8$	////	4	6	24
$8 \leq x < 12$	### ///	8	10	80
$12 \leq x < 16$	###-###-### //	17	14	238
$16 \leq x < 20$	### ////	9	18	162
جمع		44		516

مجموع ستون فراوانی و مجموع ستون آفر رو داریم، بر هم تقسیم می‌کنیم تا میانگین رو به دست بیاریم:

$$\text{میانگین} = \frac{516}{44} = 11/72$$

۳- میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس ۳۰ نفره ۱۷/۲۵ شده است. یکی از دانش‌آموزان در این امتحان نمره ۳/۵ گرفته است؛ در حالی که بقیه آنها نمره بالای ۱۵ گرفته‌اند. الف) اگر نمره این دانش‌آموز را از کلاس کنار بگذاریم، حدس می‌زنید معدل کلاس کمتر می‌شود یا بیشتر؟ حال با محاسبه معدل کلاس پس از حذف نمره این دانش‌آموز حدس خود را بررسی کنید.

نمره‌ی ۳/۵ اختلاف زیادی با میانگین کلاس دارد، پس آگه حذفش کنیم معدل کلاس بالاتر میره.

حالا می‌فوایم میانگین نمرات رو بعد از حذف ۳/۵ به دست بیاریم.

ابتدا مجموع نمرات کلاس رو به دست میاریم:

$$30 \times 17.25 = 517.5$$

عدد $3/5$ رو از مجموع نمرات کلاس کم می‌کنیم:

$$517.5 - 3.5 = 514$$

مجموع نمرات جدید رو به دست آوردیم، حالا باید این عدد رو بر تعداد بچه‌های کلاس تقسیم کنیم.

نکته‌ای که اینجا باید بهش توجه کنید اینه که تعداد نمرات دیگه 30 تا نیست بلکه 29 تا هست، چون یکی از نمرات رو کم کردیم.

پس میانگین برابره با:

$$514 \div 29 = 17.72$$

ب) حالا فرض کنید همه دانش‌آموزان کلاس نمره کمتر از 14 گرفته‌اند؛ به جز یک نفر که 20 گرفته است، معدل این کلاس 30 نفره $10/25$ شده است. اگر دانش‌آموزی را که نمره 20 گرفته است کنار بگذاریم، حدس می‌زنید معدل کلاس کمتر می‌شود یا بیشتر. معدل کلاس پس از حذف نمره این دانش‌آموز را به دست آورید و حدس خود را بررسی کنید.

اگه نمره 20 رو کنار بذاریم، معدل کلاس کمتر میشه.

مشابه قسمت الف معدل رو دوباره حساب می‌کنیم.

مجموع نمرات کلاس:

$$30 \times 10.25 = 307.5$$

نمره 20 رو از مجموع نمرات حذف می‌کنیم:

$$307.5 - 20 = 287.5$$

میانگین جدید رو به دست میاریم (تعداد نمرات ۲۹ تا میشه):

$$287.5 \div 29 = 9.91$$

همینطور که می بینیم نمراتی که خیلی بالا یا خیلی پایین تر از بقیه نمرات هستن، تاثیر زیادی روی میانگین میذارن.

ادامه تمرینها رو می تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺
در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam8

برای دریافت جزوات سایر پایه ها ، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.